

**КУРС: "КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА"**

**ТЕМА: "CAS"**



*Какие алгоритмы изучает дисциплина*

*"Компьютерная алгебра"?*

*Какие алгоритмы реализует специальное программное обеспечение (Mathematical Software) -*

*"Системы компьютерной алгебры"*

*(CAS)?*



**АЛГЕБРА**

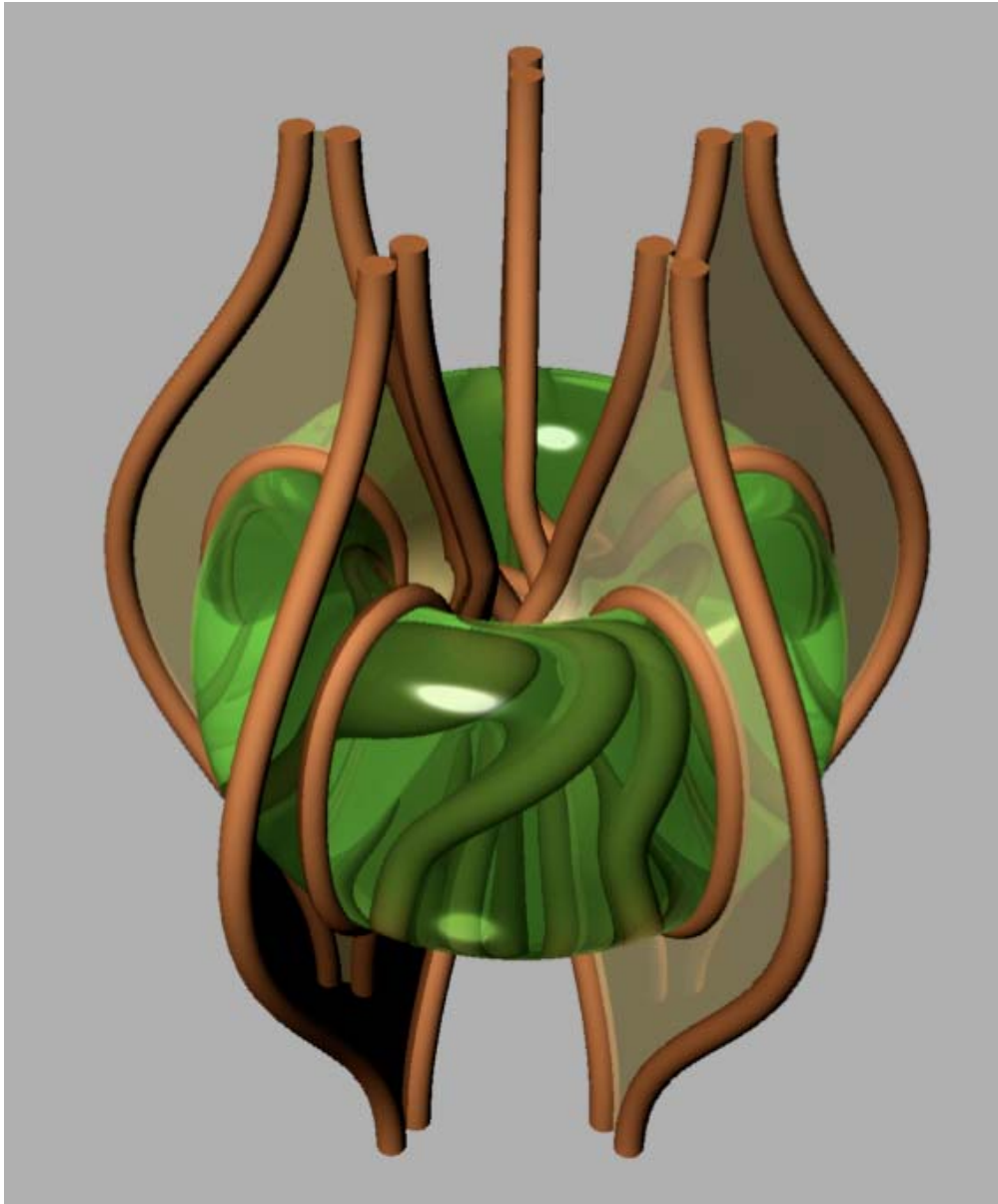
**АЛГОРИТМЫ**

**Точно  
работающие**

**Приближенные**

**КОМПЬЮТЕРНАЯ  
АЛГЕБРА**

**Численные методы  
алгебры**



# CAS

Computer

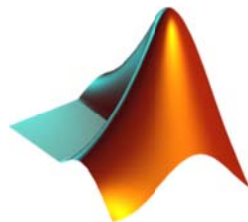
Algebra

Systems

# Система компьютерной алгебры

- программное приложение для **ТОЧНЫХ**  
(**СИМВОЛЬНЫХ**) ВЫЧИСЛЕНИЙ,

*т. е. для выполнения преобразований  
и работы с математическими выражениями  
в аналитической (символьной) форме.*

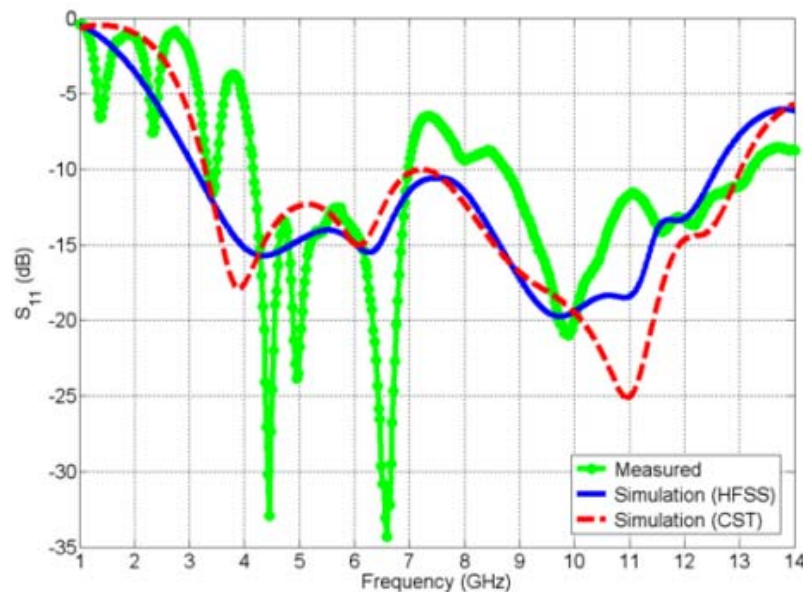


## Обычно КАС поддерживают следующие СИМВОЛЬНЫЕ ДЕЙСТВИЯ:

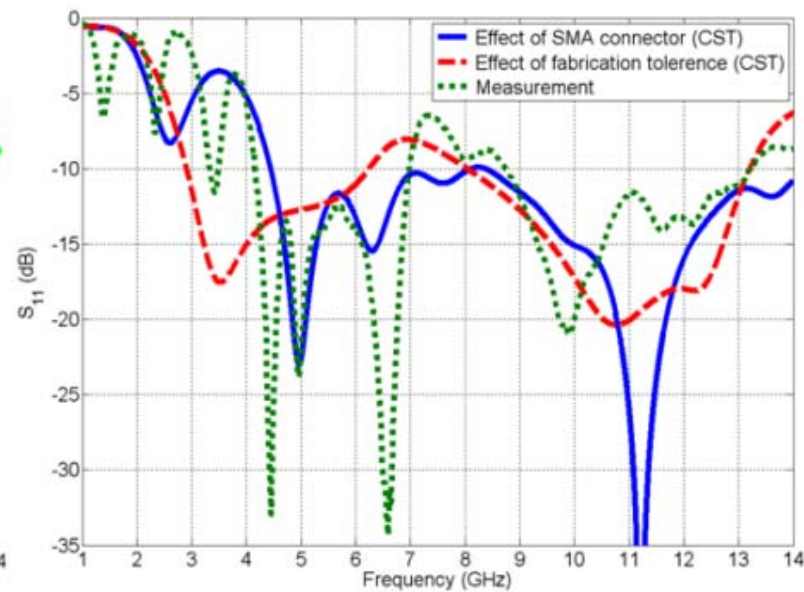
- упрощение выражений, приведение к стандартному виду;
- подстановка символьных и численных значений в выражения;
- изменение вида выражений, раскрытие произведений и степеней, разложение на множители;
- дифференцирование;



- **символьное интегрирование;**
- **решение линейных и нелинейных уравнений;**
- **алгебраическое решение дифференциальных уравнений;**
- **нахождение пределов функций и последовательностей;**
- **оперирование с рядами;**
- **матричные операции;**
- **операции со строками.**



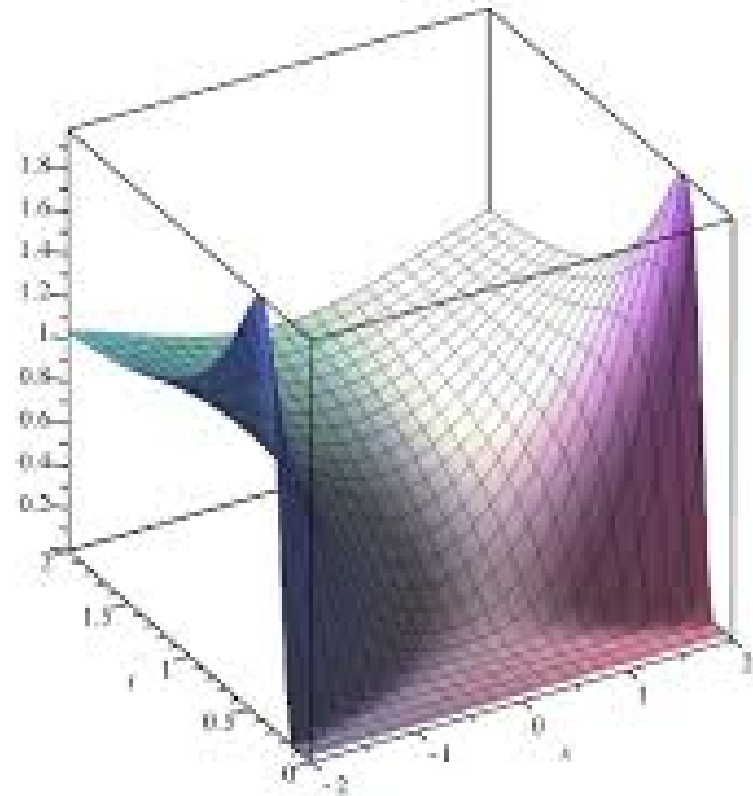
(a)



(b)

## Дополнительные возможности:

- язык программирования;
- числовые операции произвольной точности;
- целочисленная арифметика больших чисел;
- построение графиков функций (2d и 3d), анимация.





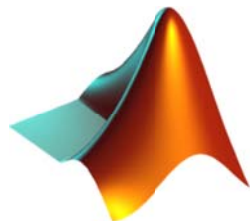
**История:** Появились в начале 1960-х.

**Лидеры:**

**Maple, MATLAB, Mathematica**

**Конкуренты** (свободно распространяемые):

**Sage, Maxima, Axiom**



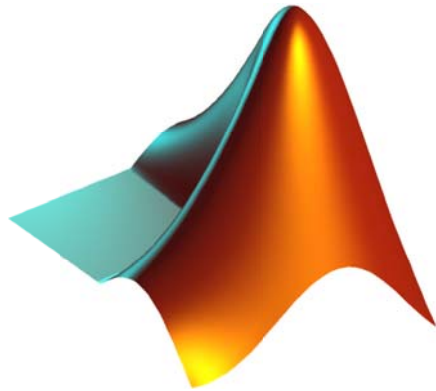
**Maple** Является продуктом компании **Waterloo Maple Inc.** Система предназначена для *символьных* вычислений; имеет ряд средств для *численного* решения задач; обладает развитыми *графическими* средствами; имеет собственный *язык программирования*, напоминающий Паскаль.



## Версии:

- **Maple 17** 13 марта 2013
- **Maple 16** 28 марта 2012
- **Maple 15** 13 апреля 2011
- **Maple 14** 29 апреля 2010
- **Maple 13** 24 апреля 2009
- **Maple 12** 13 мая 2008
- \*\*\*\*\*
- **Maple V**: август 1990
- \*\*\*\*\*
- **Maple 1.0**: январь 1982





# MATLAB

*Matrix Laboratory* - пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений и одноимённый язык программирования.

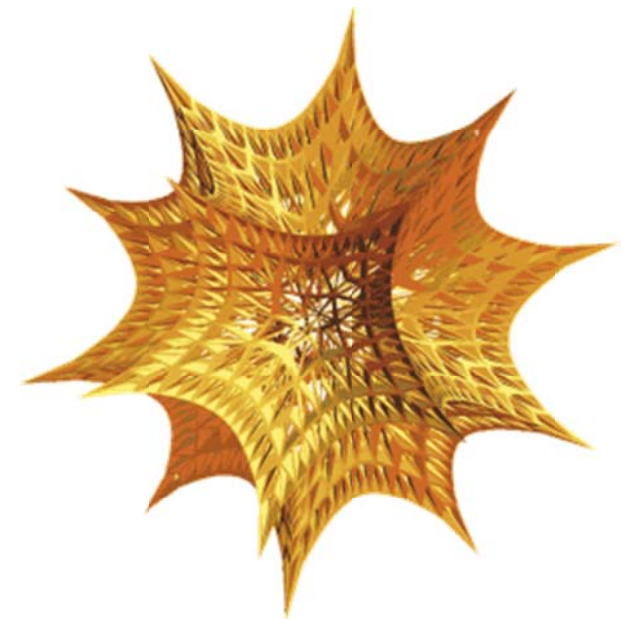
<http://www.mathworks.com/products/matlab/>

# Mathematica



- система компьютерной алгебры компании

**Wolfram Research.** <http://www.wolfram.com/>



**Sage** (*мудрец*) —



*первая версия выпущена 24 февраля 2005 года в виде свободного программного обеспечения.*

**Цель проекта:** *создание открытого ПО, альтернативного системам* **Magma, Maple, Mathematica, MATLAB.**

<http://www.sagemath.org/>

**Использует:** *готовое математическое ПО на различных языках:* C, C++, Fortran, Python. *Конечному пользователю*

*необходимо лишь знать язык* **Python.**

## Пример: аналитическое решение уравнений.

**Численное** решение квадратного уравнения  $x^2 + x - 1 = 0$ :

$$x_1, x_2 = 0.61803, -1.61803$$

**КАС** ищет **точное** (символьное) решение:

> **`x[1],x[2]:=solve(x^2+x-1=0);`**

$$x_1, x_2 := -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Но может перейти и к **численным** (приближенным) ответам:

> **`x[1],x[2]:=evalf(x[1]),evalf(x[2]);`**

$$x_1, x_2 := 0.6180339880, -1.618033988$$

Символьное решение уравнения **пятой** степени

$$x^5 + 2x^4 + x^2 + x - 3 = 0$$

**НЕВОЗМОЖНО** ввиду несуществования аналитических формул для корней уравнений степени, большей четырех.

Однако корни (*в поле комплексных чисел*) существуют, их пять штук, и **КАС** умеет (с помощью специальной функции **RootOf**) производить над ними различные действия так, как будто они известны точно, получая при этом точные результаты.

Вот сами корни (пока только "**зарегистрированные**" системой):

```
> x[1], x[2], x[3], x[4], x[5] := solve(x^5+2*x^4+x^2-3=0);
x1, x2, x3, x4, x5 := RootOf(_Z5 + 2 _Z4 + _Z2 - 3, index = 1),
RootOf(_Z5 + 2 _Z4 + _Z2 - 3, index = 2), RootOf(_Z5 + 2 _Z4 + _Z2 - 3, index = 3),
RootOf(_Z5 + 2 _Z4 + _Z2 - 3, index = 4), RootOf(_Z5 + 2 _Z4 + _Z2 - 3, index = 5)
```

Вычислим сумму и произведение корней:

> evala(x[1]+x[2]+x[3]+x[4]+x[5]);  
-2

> evala(x[1]\*x[2]\*x[3]\*x[4]\*x[5]);  
3

Полученные результаты согласуются с теоремой Виета.





Вычислим приближенные значения корней (символом  $I$  обозначается мнимая единица):

```
> x[1], x[2], x[3], x[4], x[5] :=  

     evalf(x[1]), evalf(x[2]), evalf(x[3]),  

     evalf(x[4]), evalf(x[5]);
```

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 := 0.9252531992, 0.1638945660 + 1.138918544 I, -1.183061834,$   
 $-2.069980497, 0.1638945660 - 1.138918544 I$

Снова найдем их произведение:

```
> evalf(x[1]*x[2]*x[3]*x[4]*x[5]);  

     2.9999999999 - 0.394167100 10-10 I
```

Результат отличается от точного ответа в десятом знаке после десятичной точки.

# University of Ivanovo (Russia)

